



TITLE:

提携における限界貢献度に基づく 双協力ゲームの解(最適化数理の手 法と実際)

AUTHOR(S):

鶴見, 昌代; 西村, 明子; 乾口, 雅弘

CITATION:

鶴見, 昌代 ...[et al]. 提携における限界貢献度に基づく双協力ゲームの解
(最適化数理の手法と実際). 数理解析研究所講究録 2005, 1461: 188-201

ISSUE DATE:

2005-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/47962>

RIGHT:

提携における限界貢献度に基づく双協力ゲームの解

大阪大学大学院基礎工学研究科

鶴見 昌代 (Masayo Tsurumi)

西村 明子 (Akiko Nishimura)

乾口 雅弘 (Masahiro Inuiguchi)

Graduate School of Engineering Science, Osaka Univ.

1. はじめに

通常の協力ゲームの重要な解には, Shapley 値 [10] や Banzhaf 値 [1], そして Banzhaf 値を正規化した正規化 Banzhaf 値があり, 投票が行われる状況における投票者の影響力分析など, 多くの場面に有効であることが知られている. Shapley 値は, 各プレイヤーが順列にしたがって提携を形成し, その順列が等確率で生じると考えたときの限界貢献度の期待値であると解釈でき, Banzhaf 値は, すべての提携が等確率で生じるときの提携における限界貢献度の期待値であると解釈できる. また, 投票の状況は, 投票ゲーム, あるいは投票ゲームの部分クラスである重みつき多数決ゲームによって表現される.

通常の協力ゲームは, 各プレイヤーは提携に参加するか否かのいずれかであるとの前提に基づいている. しかしながら, 提携に賛成する立場と, 反対する立場と, 中立の立場のいずれかを選択できるような状況もある. このような状況を取り扱うことができる協力ゲームに, 双協力ゲーム (bicooperative game) がある [2]. 双協力ゲームにおいては, プレイヤーの順列に対応する概念に基づいた Shapley 値 [4], 確率値 (probabilistic value), 無矛盾順序値 (compatible-order value) [3] が提案されている. また, 双協力ゲームにおける Shapley 値を別のアプローチから扱った Grabisch ら [7] による研究もある.

本研究では, Banzhaf 値に対応する双協力ゲームの概念として擬 Banzhaf 値を提案する. さらにそれを正規化した概念として, 双協力ゲームにおける正規化 Banzhaf 値を定義する. また, 提携に基づく限界貢献度について議論する. 正規化 Banzhaf 値は, すべての提携の生起確率が等しいときの提携に基づく限界貢献度の期待値であると考えられる. これらの解の合理性を示すために公理化を行い, 数値例を与える. また, 双協力ゲームとしての重みつき多数決ゲームを定式化し, 数値例を与える.

2. 通常の協力ゲーム

2.1. 通常の協力ゲームとその解

プレイヤーの集合を $N = \{1, 2, \dots, n\}$ とするとき, 通常の協力ゲームは $v(\emptyset) = 0$ を満たす $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ で定義される. このとき, 関数値 $v(S)$ は, 提携 $S \in 2^N$ によって得られる最大利益あるいは最小費用を表す. プレイヤー全体の集合 N を固定したときの協力ゲーム全体の集合を $\mathcal{G}(N)$ と表し, プレイヤー全体の集合 N を固定せずに考えたゲーム全体の集合を \mathcal{G} と表す.

任意の $T \subseteq N, T \neq \emptyset$ に対して $v^T: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する.

$$v^T(S) = \begin{cases} 1 & S \supseteq T \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\{v^T \mid T \subseteq N, T \neq \emptyset\}$ は $\mathcal{G}(N)$ の基底となる. $T = \{i\}$ としたゲーム $v^{\{i\}}$ においては, プレイヤー i のが協力すればゲームの値が 1, そうでなければ 0 であるので, プレイヤー i はこのゲームにおいて独裁者と呼ばれる.

全単射 $\pi: N \rightarrow N$ は, N における順列とみなされる. この順列の集合を $\Pi(N)$ と表す. $i \in N$ に対して $P(\pi, i) = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ とするとき, プレイヤー i の提携 S における限界貢献度 $C_i(v)(S)$ および順列 π における限界貢献度 $m_i(v)(\pi)$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned} C_i(v)(S) &= \begin{cases} v(S \cup \{i\}) - v(S) & i \notin S \\ v(S) - v(S \setminus \{i\}) & i \in S \end{cases} \\ &= v(S \cup \{i\}) - v(S \setminus \{i\}) \\ m_i(v)(\pi) &= v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i)) \end{aligned}$$

関数 $g: \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($v \mapsto (g_i(v))_{i \in N}$) は, 通常の協力ゲームの解であると考えられる. 協力ゲームの主要な解には, Shapley 値, Banzhaf 値, 正規化 Banzhaf 値, 確率値などがある. 通常の協力ゲームの Shapley 値は, 次のように定義される.

定義 1 次で定義される $\phi: \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($v \mapsto (\phi_i(v))_{i \in N}$) は, $\mathcal{G}(N)$ 上の Shapley 値と呼ばれる.

$$\phi_i(v) = \sum_{\pi \in \Pi(N)} \frac{1}{n!} \cdot m_i(v)(\pi) = \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Shapley 値は, すべての順列が等確率で生じるときの各プレイヤーの順列における限界貢献度の期待値である. これに対して, 通常の協力ゲームの Banzhaf 値は次のように定義される.

定義 2 次で定義される $\beta: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($v \mapsto (\beta_i(v))_{i \in N}$) は, \mathcal{G} 上の Banzhaf 値と呼ばれる.

$$\beta_i(v) = \frac{1}{2^n} \sum_{S \in 2^N} C_i(v)(S) = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Banzhaf 値は, すべての提携が等確率で生じるときの各プレイヤーの提携における限界貢献度の期待値である. また, $\mathcal{G}_\beta = \{v \in \mathcal{G} \mid \sum_{j \in N} \beta_j(v) \neq 0\}$ とすると, 正規化 Banzhaf 値は, Banzhaf 値を全体合理性を満たすように線形変換した値として, 次のように定義される.

定義 3 次で定義される $\hat{\beta}: \mathcal{G}_\beta \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($v \mapsto (\hat{\beta}_i(v))_{i \in N}$) は, \mathcal{G}_β 上の正規化 Banzhaf 値と呼ばれる.

$$\hat{\beta}_i(v) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \beta_j(v)} \beta_i(v)$$

また, 確率値は次のように定義される.

定義 4 [12] 任意の $i \in N$ に対して, $p_S^i \geq 0$, $\sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} p_S^i = 1$ と次式を満たす $\{p_S^i\}_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}}$ が存在するとき, $\Phi: \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($v \mapsto (\phi_i(v))_{i \in N}$) は, $\mathcal{G}(N)$ 上の確率値 (probabilistic value) と呼ばれる.

$$\Phi_i(b) = \sum_{S \in 2^{N \setminus \{i\}}} p_S^i (v(S \cup \{i\}) - v(S))$$

Shapley 値や Banzhaf 値は確率値である. 実際, Shapley 値は, 任意の $S \in 2^{N \setminus \{i\}}$ に対して $p_S^i = s!(n-t-1)!/n!$ としたときの確率値であり, Banzhaf 値は, $p_S^i = 1/2^{n-1}$ としたときの確率値である.

Shapley 値と Banzhaf 値の合理性を示すため, 公理系による特徴づけがなされている. 公理系のうちの一つの公理として, 線形性がある. 線形性は次のように定義される.

公理 C1 (線形性)

任意のゲーム $v, w \in \mathcal{G}$ と任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対して, $g(\alpha v + \beta w) = \alpha g(v) + \beta g(w)$ が成り立つ.

任意の $S \subseteq N \setminus \{i\}$ に対して $v(S \cup \{i\}) - v(S) = 0$ が成り立つとき, プレイヤー i は v においてナルプレイヤー (null player) であると呼ばれる. ナルプレイヤーに関する性質として, 次の性質が定義されている.

公理 C2 (ナルプレイヤーに関する性質)

$i \in N$ がゲーム $v \in \mathcal{G}$ においてナルプレイヤーならば, $g_i(v) = 0$ が成り立つ.

i がナルプレイヤーであるとは, どんな提携に対しても, i が新たに参加することで利益が増加しないということである. ナルプレイヤーに関する性質とは, このようなプレイヤーには利益が配分されるべきでないということを表している.

任意の置換 $\pi \in \Pi(N)$ と $S \subseteq N$ に対して, $\pi(S) = \{\pi(i) \mid i \in S\}$ とする. このとき, ゲーム $\pi v \in \mathcal{G}$ を任意の $S \subseteq N$ に対して $\pi v(\pi(S)) = v(S)$ で定義する. このとき, 次の公理が定義されている.

公理 C3 (無名性, 対称性)

任意のゲーム $v \in \mathcal{G}$ において, 任意の $i \in N$ と $\pi \in \Pi(N)$ に対して, $g_{\pi(i)}(\pi v) = g_i(v)$ が成り立つ.

これは, プレイヤーの名前を付け替えても, 実質的な解は不変であることを表現している.

公理 C4 (全体合理性, パレート最適性)

任意のゲーム $v \in \mathcal{G}$ に対して $\sum_{i \in N} g_i(v) = v(N)$ が成り立つ.

全体合理性は, 提携 N として得られた値を過不足なく分け合うという意味で合理的な性質である.

定理 1 公理 C1-C4 を満たす関数 $g: \mathcal{G}(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ は一意に存在して, $\mathcal{G}(N)$ 上の Shapley 値である.

定理から、公理 C1-公理 C4 が合理的であると考えられるならば、Shapley 値を解として用いることが合理的であるといえる。Shapley 値の公理系による特徴づけには、他にも Young[13] や Weber [12], Chun [5], Hart と Mas-Colell [8], van den Brink [11] によるものなどがある。

また、Banzhaf 値の公理系には、Lehrer [9] によって与えられたものがある。そこで用いられる公理の一つは次のように定義される。

公理 C5 (2人プレイヤーの間の合理性)

$i, j \in N (i \neq j)$ に対して $L = \{i, j\}$ を考える。ここで、プレイヤーの集合を $N_L = (N \setminus L) \cup \{l\}$ とし、 N_L 上での協力ゲーム $v_L: 2^{N_L} \rightarrow \mathbb{R}$ を各 $S \subseteq N_L$ に対して次で定める。

$$v_L(S) = \begin{cases} v(S) & l \notin S \\ v(S - \{l\} \cup L) & l \in S \end{cases}$$

このとき、任意の $i, j \in N (i \neq j)$, $v \in \mathcal{G}$ に対して $g_i(v) + g_j(v) \leq g_l(v_L)$ が成り立つ。

2人プレイヤーの間の合理性は、2人のプレイヤーが1人のプレイヤーとして行動するときに得られる利得が、もとのゲームで2人が得ていた利得の和未満にはならないことを意味している。

また、独裁者に対して次の性質が定義されている。

公理 C6 (独裁者に関する性質)

$v \in \mathcal{G}$ に対して、 $g_i(v^{(i)}) = 1$ が成り立つ。

このような公理を考えると、Banzhaf 値は次のように特徴づけられる。

定理 2 公理 C1-C3, C5, C6 を満たす $g: \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ は一意に存在して \mathcal{G} 上の Banzhaf 値である。

定理から、公理 C1-C3, C5, C6 が合理的であると考えられるならば、Banzhaf 値を解として用いることが合理的であるといえる。

2.2. 投票ゲーム、重みつき多数決ゲームと投票力指数

ここでは、協力ゲームの部分クラスとなる投票ゲームと重みつき多数決ゲーム、そしてそれらに対する解である投票力指数について説明する。任意の $S \subseteq N$ に対して $v(S) \in \{0, 1\}$ で、任意の $S \subseteq T \subseteq N$ に対して $v(S) \leq v(T)$ で、 $v(N) = 1$ を満たす協力ゲーム $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ は、投票ゲームと呼ばれる。このとき、プレイヤーを投票者とみると、 $v(S) = 1$ を満たす $S \subseteq N$ は、議案を可決できる提携と解釈できる。このような提携は、勝利提携と呼ばれる。勝利提携の集合を W と表すと、投票ゲーム v は W によって表現できる。投票ゲームにおける Shapley 値や Banzhaf 値は、それぞれ Shapley-Shubik 指数、Banzhaf 指数と呼ばれ、投票力の分析に有効であることが知られている。

また、 $\sum_{i \in S} w_i \geq r \sum_{i \in N} w_i$ であるとき、またそのときに限って $v(S) = 1$ を満たす非負の w_1, w_2, \dots, w_n と $r (0 < r \leq 1)$ が存在するとき、投票ゲーム v は重みつき多数決ゲームと呼ばれる。重みつき多数決ゲームは、 $[r; w_1, w_2, \dots, w_n]$ と表現される。

3. 双協力ゲームとその解

双協力ゲームは, $S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$ を満たす提携の組 (S, T) に基づいて定義される. ここでは, $S, T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$ を満たす提携の組 (S, T) を符号つき提携 (a signed coalition) と呼び, 混乱の恐れのないときには提携とも呼ぶ. S は提携に参加しているプレイヤーの集合, T は提携に反対するプレイヤーの集合, $N \setminus (S \cup T)$ は中立的なプレイヤーの集合と考えることができる. 符号つき提携すべてからなる集合は 3^N と表される. $b(\emptyset, \emptyset) = 0$ を満たす $b: 3^N \rightarrow \mathbb{R}$ は双協力ゲームと呼ばれる [2, 3, 4]. 全体集合を N としたときの双協力ゲームすべてからなる集合を $BG(N)$ と表す.

Grabisch と Labreuche [6] は, 次の 3^N 上の関係を定義している.

$$(A, B) \sqsubseteq (C, D) \iff A \subseteq C, B \supseteq D$$

これを用いて, Bilbao ら [3, 4] は, 上位全員一致ゲーム (superior unanimity game) $\bar{u}_{(S,T)}(A, B)$, 下位全員一致ゲーム (inferior unanimity game) $\underline{u}_{(S,T)}(A, B)$, 一致ゲーム (identity game) $\delta_{(S,T)}(A, B)$ を次のように定義した.

$(S, T) \in 3^N, (S, T) \neq (\emptyset, N)$ に対して, 次を上位全員一致ゲームと呼ぶ.

$$\bar{u}_{(S,T)}(A, B) = \begin{cases} 1, & \text{if } (A, B) \sqsupseteq (S, T), (A, B) \neq (\emptyset, \emptyset), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$(S, T) \in 3^N, (S, T) \neq (N, \emptyset)$ に対して, 次を下位全員一致ゲームと呼ぶ.

$$\underline{u}_{(S,T)}(A, B) = \begin{cases} -1, & \text{if } (A, B) \sqsubseteq (S, T), (A, B) \neq (\emptyset, \emptyset), \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$(S, T) \in 3^N, (S, T) \neq (\emptyset, \emptyset)$ に対して, 次を一致ゲームと呼ぶ.

$$\delta_{(S,T)}(A, B) = \begin{cases} 1, & \text{if } (A, B) = (S, T) \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\{\bar{u}_{(S,T)} \mid (S, T) \in 3^N, (S, T) \neq (\emptyset, N)\}, \{\underline{u}_{(S,T)} \mid (S, T) \in 3^N, (S, T) \neq (N, \emptyset)\}, \{\delta_{(S,T)} \mid (S, T) \in 3^N, (S, T) \neq (\emptyset, \emptyset)\}$ は, それぞれ $BG(N)$ の基底となる.

プレイヤー $i \in N$ が得られるべき利益 (または負担すべきコスト) を与える関数 $f: BG(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($b \mapsto (f_i(b))_{i \in N}$) は, 双協力ゲームの解と考えられる. Bilbao らは, 双協力ゲームにおける確率値, Shapley 値, 無矛盾順序値を解として提案し, その公理系による特徴づけをしている [3, 4].

確率値は, 次のように定義される.

定義 5 [3] $\Phi: BG(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($b \mapsto (\Phi_i(b))_{i \in N}$) は, $\bar{p}_{(S,T)}^i \geq 0, \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} \bar{p}_{(S,T)}^i = 1, \underline{p}_{(S,T)}^i \geq 0, \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} \underline{p}_{(S,T)}^i = 1$ と次式を満たす $\bar{p}_{(S,T)}^i, \underline{p}_{(S,T)}^i$ が存在するとき, 確率値と呼ばれる.

$$\begin{aligned} \Phi_i(b) = & \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [\bar{p}_{(S,T)}^i (b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)) \\ & + \underline{p}_{(S,T)}^i (b(S, T) - b(S, T \cup \{i\}))]. \end{aligned}$$

$(A, B) \sqsubseteq (C, D)$ または $(C, D) \sqsubseteq (A, B)$ ならば, $(A, B), (C, D) \in 3^N$ は比較可能であると呼ばれる. 順序集合 $(3^N, \sqsubseteq)$ に対して, $Q \subseteq 3^N$ となる (Q, \sqsubseteq) は, 誘導された部分順序集合と呼ばれる. 任意の 2 要素が比較可能であるような 3^N の誘導された部分順序集合は, 3^N の鎖と呼ばれる. このとき, 最大鎖は, 各プレイヤーが反対から中立へ, 中立から賛成へ意見を変える過程とみなせる.

Bilbao et al.[4] は, Shapley 値として, すべての最大鎖が等確率で生じるときの最大鎖におけるプレイヤーの限界貢献度の期待値を定義した.

定義 6 [4] $\phi: BG(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($b \mapsto (\phi_i(b))_{i \in N}$) は, 次を満たすとき Shapley 値と呼ばれる.

$$\phi_i(b) = \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [\bar{p}_{s,t}(b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)) + \underline{p}_{s,t}(b(S, T) - b(S, T \cup \{i\}))]$$

ただし, $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$ に対して, $\bar{p}_{s,t} = (n+s-t)!(n+t-s-1)!/(2n)! \cdot 2^{n-s-t}$, $\underline{p}_{s,t} = (n+t-s)!(n+s-t-1)!/(2n)! \cdot 2^{n-s-t}$ とする.

Bilbao ら [4] は, 確率値の公理系による特徴づけをしている. また, 各最大鎖が等確率で生じるとは限らない場合の解として, 無矛盾順序値を考えている. 無矛盾順序値は, 確率順序値 (random-order value) に対応する双協力ゲームの概念であると考えられる. 無矛盾順序値は確率値の特別な場合であり, Shapley 値は無矛盾順序値の特別な場合である.

Grabisch と Labreuche [7] は, 双協力ゲームにおける Shapley 値に対する異なるアプローチをしている. 彼らは, Shapley 値は二つのタイプで定義されるとしている. 一つは, 賛成側に参加するとき, もう一つは反対側に参加するときに対する Shapley 値である. 定義は次のとおりである.

定義 7 [7] $\phi_{i,\emptyset}: BG(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ と $\phi_{\emptyset,i}: BG(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ は, 次を満たすとき, それぞれ賛成側への Shapley 値, 反対側への Shapley 値と呼ばれる.

$$\begin{aligned} \phi_{i,\emptyset}(v) &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [b(S \cup \{i\}, N \setminus (S \cup \{i\})) - b(S, N \setminus (S \cup \{i\}))], \\ \phi_{\emptyset,i}(v) &= \sum_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} [b(S, N \setminus (S \cup \{i\})) - b(S, N \setminus S)]. \end{aligned}$$

Grabisch と Labreuche [7] は, この値の合理性を示すため, 公理系による特徴づけをしている. さらに, 彼らは Shapley 相互作用指数についても議論している.

4. 擬 Banzhaf 値とその公理系

通常の協力ゲームにおける Banzhaf 値は任意の $S \in 2^{N \setminus \{i\}}$ に対して $p_{(S,T)}^i$ の値が等しいときの $\mathcal{G}(N)$ 上の確率値であることが知られている. そこで, $\bar{p}_{(S,T)}^i$ と $p_{(S,T)}^i$ の値がすべて等しいときの $BG(N)$ 上の確率値を双協力ゲームの新しい解として提案する.

定義 8 次で定義される $\beta: BG(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ ($b \mapsto (\beta_i(b))_{i \in N}$) を擬 Banzhaf 値と呼ぶ.

$$\beta_i(b) = \frac{1}{3^{n-1}} \sum_{(S,T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})]$$

双協力ゲームにおける解 $f: BG(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ が満たすべき性質として、次のような公理を考える。

公理 B1 (線形性)

任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と任意の $b, w \in BG(N)$ に対して $f(\alpha b + \beta w) = \alpha f(b) + \beta f(w)$ が成り立つ。

双協力ゲームにおけるナルプレイヤーの定義を考える。任意の $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$ に対して $b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T) = 0$ かつ $b(S, T) - b(S, T \cup \{i\}) = 0$ が成り立つとき、双協力ゲームにおいてプレイヤー $i \in N$ をナルプレイヤーと呼ぶ。これがナルプレイヤーの自然な拡張であると考えられるが、ここではこの定義を緩和して得られる弱ナルプレイヤーを考える。任意の $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$ に対して $b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\}) = 0$ が成り立つとき、 i を $b \in BG(N)$ での弱ナルプレイヤーと呼ぶ。明らかに、ナルプレイヤーならば、弱ナルプレイヤーである。このとき、次の性質を定義できる。

公理 B2 (弱ナルプレイヤーの性質)

プレイヤー $i \in N$ が $b \in BG(N)$ で弱ナルプレイヤーならば、 $f_i(b) = 0$ となる。

ナルプレイヤーの定義が緩和されているため、公理としてはナルプレイヤーの性質より厳しいものになっている。

通常のゲームにおける Banzhaf 値が満たす独裁者に関する性質に対応する性質を双協力ゲームに導入するために、まず双協力ゲーム上での独裁者を定義する。双協力ゲーム $\bar{u}_{(\{i\}, N \setminus \{i\})} \in BG(N)$ において、プレイヤー $i \in N$ を賛成側独裁者と呼ぶ。また、 $\underline{u}_{(N \setminus \{i\}, \{i\})} \in BG(N)$ においてプレイヤー $i \in N$ を反対側独裁者と呼ぶ。独裁者の定義を用いて、独裁者に関する性質を双協力ゲームに拡張すると、次の性質が考えられる。

公理 B3 (独裁者に関する性質)

任意の $i \in N$ に対して次が成り立つ。

$$f_i(\bar{u}_{(\{i\}, N \setminus \{i\})}) = 1, f_i(\underline{u}_{(N \setminus \{i\}, \{i\})}) = -1$$

また、一致ゲームについては次の性質を考える。

公理 B4 (一致ゲームに関する性質)

$i \in S, i \in S'$ となる任意の $(S, T) \in 3^N, (S', T') \in 3^N$ に対して $f_i(\delta_{(S, T)}) = f_i(\delta_{(S', T')})$ となり、かつ、 $i \in T, i \in T'$ となる任意の $(S, T) \in 3^N, (S', T') \in 3^N$ に対して $f_i(\delta_{(S, T)}) = f_i(\delta_{(S', T')})$ となる。

公理 B5 (二つのゲームの関係に関する性質)

双協力ゲームにおける2つのゲーム $b, b' \in BG(N)$ を考える。このとき、 $\sum_{(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} \{b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)\} = \sum_{(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} \{b'(S \cup \{i\}, T) - b'(S, T)\}$ かつ $\sum_{(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} \{b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})\} = \sum_{(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} \{b'(S, T) - b'(S, T \cup \{i\})\}$ ならば、 $f_i(b) = f_i(b')$ である。

これらの公理を用いて、擬 Banzhaf 値を次のように特徴づけることができる。

定理 3 公理 B1-B4 を満たす関数 $f_i : \mathcal{BG}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ は唯一存在して、擬 Banzhaf 値である。

定理 4 公理 B1-B3 と 5 を満たす関数 $f_i : \mathcal{BG}(N) \rightarrow \mathbb{R}$ は唯一存在して、擬 Banzhaf 値である。

5. 正規化 Banzhaf 値とその公理系

擬 Banzhaf 値をすべてのプレイヤーについて加算した値が $b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N)$ となるように正規化したものを正規化 Banzhaf 値として定義する。すなわち、 $\mathcal{BG}_\beta(N) = \{b \in \mathcal{BG} \mid \sum_{j \in N} \beta_j(b) \neq 0\}$ とすると、正規化 Banzhaf 値は次のように定義される。

定義 9 次で定義される $\hat{\beta} : \mathcal{BG}_\beta(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ を $\mathcal{BG}_\beta(N)$ 上の正規化 Banzhaf 値と呼ぶ。

$$\hat{\beta}_i(b) = \frac{b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N)}{\sum_{j \in N} \beta_j(b)} \beta_i(b)$$

正規化 Banzhaf 値は、すべての（符号つき）提携が等確率で生じるときの（符号つき）提携に基づく限界貢献度を正規化した値であると考えられる。

ここで、解 $f : \mathcal{BG}(N) \rightarrow \mathbb{R}^N$ が満たすべき性質として、次の三つの公理を考える。

公理 B6 （効率性、全体合理性）

任意の $b \in \mathcal{BG}(N)$ に対して、次が成り立つ。

$$\sum_{i \in N} f_i(b) = b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N)$$

効率性は、Shapley 値も満たす公理であり、解は $b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N)$ を過不足なく分け合うべきであるという点で自然な性質である。

公理 B7 （加重線形性）

$b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N) \neq 0$ を満たす $b \in \mathcal{BG}_\beta(N)$ に対して $d(b) = \sum_{i \in N} \beta_i(b) / \{b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N)\}$ とする。 $b(N, \emptyset) - b(\emptyset, N) \neq 0$ を満たす $b_1 + \cdots + b_m \in \mathcal{BG}_\beta(N)$ に対して、次が成り立つ。

$$d(b_1 + \cdots + b_m) f_i(b_1 + \cdots + b_m) = d(b_1) f_i(b_1) + \cdots + d(b_m) f_i(b_m)$$

また、任意の $b \in \mathcal{BG}_\beta(N)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f_i(\alpha b) = \alpha f_i(b)$ が成り立つ。

公理 B8 （上位全員一致ゲームに関する性質）

$(S, T) \in 3^N$, $(S, T) \neq (\emptyset, N)$ とする。このとき、任意の $(i, j) \in N^2$ に対して、次が成り立つ。

$$\begin{aligned} & f_i(\bar{u}_{(S, T)}) : f_j(\bar{u}_{(S, T)}) \\ &= |\{S' \subseteq N \mid S \subseteq S' \subseteq N - T, S \ni i\}| : |\{S' \subseteq N \mid S \subseteq S' \subseteq N - T, S \ni j\}| \end{aligned}$$

上位全員一致ゲームに関する性質を別の視点から説明する. $(S, T) \in 3^N$, $(S, T) \neq (\emptyset, N)$ が与えられたとき, $\bar{u}_{(S,T)}$ がとりうる値は, i が賛成するか, 中立か, 反対するかによって次のようになる.

| $\bar{u}_{(S,T)}$ | $i \in S$ | $i \in T$ | $i \notin S \cup T$ |
|-------------------|-----------|-----------|---------------------|
| 賛成 | 0 or 1 | 0 or 1 | 0 or 1 |
| 中立 | 0 | 0 or 1 | 0 or 1 |
| 反対 | 0 | 0 | 0 or 1 |

プレイヤー i が $S, T, N \setminus (S \cup T)$ のいずれに含まれるかで, i のとりうる値が 0 に定まるかどうか異なる. 賛成, 中立, 反対が等確率で生じると考えたとき, 各プレイヤー i の $\bar{u}_{(S,T)}$ において貢献する力は, このゲームで値が 0 に定まるケースの数に比例していると考えるのが自然である. このことと, 公理 B8 は等価であることは容易にわかる. このことから, 公理 B8 も自然であろうと考えられる.

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 5 公理 B6–B8 を満たす関数 $f: \mathcal{BG}_\beta(N) \rightarrow \mathbb{R}^n$ は一意に存在し, 正規化 Banzhaf 値である.

定理より, 公理 B6–B8 が妥当であると考えられるなら, 正規化 Banzhaf 値が合理的な解であると考えられる.

例 1 $N = \{1, 2\}$ とし, 双協力ゲーム

$$b(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{if } S \ni 2 \text{ or } (S, T) = (\{1\}, \emptyset) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

を考える. このとき, 擬 Banzhaf 値は, $\beta_1(b) = 1/3$, $\beta_2(b) = 1$ となり, 正規化 Banzhaf 値は $\hat{\beta}_1(b) = 1/4$, $\hat{\beta}_2(b) = 3/4$ となる. 正規化 Banzhaf 値は, 擬 Banzhaf 値とは異なり, 常に効率性を満たしているため, システム内で配分されるべき利益が過不足なく配分される. このことは, 投票システムにおいては相対的発言力を表していると考えられる.

一方, 任意の $S \subseteq N$ に対し, $v(S) = b(S, N \setminus S)$ と定められるゲーム $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ を考えると, 通常の協力ゲームに対する Banzhaf 値は $\hat{\beta}_1(v) = 0$ となる. $b(\{1\}, \emptyset) = 1$, $b(\emptyset, \{1\}) = 0$ となり, プレイヤー 2 が中立的立場の場合にはプレイヤー 1 の行動によって値が変わることから, 中立的立場を取りうる状況ではプレイヤー 1 の影響力は 0 でないと考えるのが自然である. このプレイヤー 1 の影響力は, 通常の協力ゲームにおける正規化 Banzhaf 値では反映できていないのに対して, 双協力ゲームにおける正規化 Banzhaf 値では反映できていることがわかる.

6. 提携における限界貢献度の視点からみた擬 Banzhaf 値と正規化 Banzhaf 値

通常の協力ゲームにおける Banzhaf 値, 正規化 Banzhaf 値は, それぞれ各提携が等確率で生じるときの提携における限界貢献度の期待値とそれを正規化した値である. この節では, 双協力ゲームにおける擬 Banzhaf 値と正規化 Banzhaf 値について, 符号つき提携における限界貢献度との関係について議論する.

6.1. 符号つき提携における限界貢献度

通常の協力ゲーム $v \in \mathcal{G}$ におけるプレイヤー $i \in N$ の提携 S での限界貢献度 $C_i(v)(S)$ を考える. $S \ni i$ を満たす $S \in 2^N$ に対する限界貢献度は, $v(S) - v(S \setminus \{i\})$ であり, プレイヤー i が協力したときと協力しなかったときとの利益の差を表している. 同様に, $S \not\ni i$ を満たす $S \in 2^N$ に対して, $v(S \cup \{i\}) - v(S)$ であることから, この場合もプレイヤー i が協力したときと協力しなかったときとの利益の差を表していると考えられる.

通常の協力ゲームにおける各提携での限界貢献度の考え方にに基づき, 双協力ゲーム $b \in \mathcal{BG}$ における符号つき提携 $(S, T) \in 3^N$ での限界貢献度 $MC_i(b)(S, T)$ について考える. まず, $i \notin S \cup T$ を満たす $(S, T) \in 3^N$ について考える. この提携においては, プレイヤー i は中立である. このような提携でのプレイヤー i の限界貢献度 $MC_i(b)(S, T)$ は, プレイヤー i が中立から賛成に変更したときの利益の差分と, 反対から中立に変更したときの利益の差分の和と考えるのが合理的かもしれない. このことから, $i \notin S \cup T$ を満たす $(S, T) \in 3^N$ に対する $MC_i(b)(S, T)$ を次のように定義する.

$$\begin{aligned} MC_i(b)(S, T) &= [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + [b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})] \\ &= b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\}). \end{aligned}$$

次に, $(S \cup \{i\}, T) \in 3^N$ を考える. この符号つき提携では, プレイヤー i は賛成している. このプレイヤーにおける限界貢献度 $MC_i(b)(S \cup \{i\}, T)$ の定義は, いくつか考えうる. たとえば, 中立から賛成へ変更したときの利益の差分, すなわち $b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)$ で定義されるかもしれない. これは, 賛成側にいたときには, 中立にしか意見を変更することができないという前提に基づいていると考えられる.

$MC_i(b)(S \cup \{i\}, T)$ の他の定義としては, 中立から賛成に変更したときの利益の差分と, 反対から賛成に変更したときの差分との和の定数倍もありうる. すなわち, $MC_i(b)(S \cup \{i\}, T)$ は, $[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] = 2b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})$ に比例しているとも考えることもできる. これは, プレイヤーが賛成しているとき, 中立にも反対にも同様に意見を変えることができるという前提に基づいていると考えられる.

さらに, $MC_i(b)(S \cup \{i\}, T)$ の他の定義としては, 中立から賛成に変更したときの利益の差分の2倍と, 反対から賛成に変更したときの差分との和すなわち, $2[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] = 3b(S \cup \{i\}, T) - 2b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})$ の定数倍もありうる. これは, 賛成から反対への変更も, 賛成から中立への変更の方が2倍起こりやすいとの前提に基づいていると考えられる.

このように, $(S \cup \{i\}, T)$ に対してのプレイヤー i の限界貢献度の定義には, いくつかの可能性があり, 上で述べなかった可能性もありうる. しかしながら, いずれの定義でも $MC_i(b)(S \cup \{i\}, T)$ は $\lambda[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + \mu[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})]$ ($\lambda > 0, \mu \geq 0$) の形で表現されていることがわかる.

また, 同様に $(S, T \cup \{i\}) \in 3^N$, すなわち, プレイヤー i が反対側にいるときについても, 同様に定義のいくつかの可能性を得ることができる. $(S, T \cup \{i\})$ における限界貢献度のそれぞれの定義は, $(S \cup \{i\}, T)$ における限界貢献度のそれぞれの定義と対応づけられる.

このことから、 3^N 上で定義される限界貢献度は、 $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$ とするとき、ある $\lambda > 0, \mu \geq 0$ を適切にとったとき次で定義できると考えられる。

$$\begin{aligned} MC_i(b)(S \cup \{i\}, T) &= \lambda[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + \mu[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] \\ MC_i(b)(S, T) &= [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + [b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})] \\ MC_i(b)(S, T \cup \{i\}) &= \mu[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] + \lambda[b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})] \end{aligned}$$

6.2. 提携における限界貢献度の期待値

3^N 上で定義される限界貢献度は、 $\lambda > 0, \mu \geq 0$ によって、異なる値をとるが、いずれの値を用いたとしても、すべての符号つき提携が等確率で生じるときの符号つき提携における限界貢献度の期待値は、次の命題で示されるように、 $\sum_{(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})]$ に比例することがわかる。

命題 1 プレイヤー i の 3^N 上の限界貢献度は、任意の $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$ に対して、ある $\lambda > 0, \mu \geq 0$ が存在して次のように表されたとする。

$$\begin{aligned} MC_i(b)(S \cup \{i\}, T) &= \lambda[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + \mu[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] \\ MC_i(b)(S, T) &= [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + [b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})] \\ MC_i(b)(S, T \cup \{i\}) &= \mu[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] + \lambda[b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})] \end{aligned}$$

このとき、すべての符号つき提携が等確率で生じるときの符号つき提携に基づく限界貢献度の期待値 $\zeta_i(b)$ は、ある $\alpha > 0$ が存在して、次で表される。

$$\zeta_i(b) = \alpha \sum_{(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}} [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})]$$

ζ を全体合理性を満たすように正規化すると、正規化 Banzhaf 値が得られる。また、独裁者に関する性質を満たす ζ は、擬 Banzhaf 値と一致する。すなわち、次の命題が成り立つ。

命題 2 プレイヤー i の 3^N 上の限界貢献度は、任意の $(S, T) \in 3^{N \setminus \{i\}}$ に対して、ある $\lambda > 0, \mu \geq 0$ が存在して次のように表されたとする。

$$\begin{aligned} MC_i(b)(S \cup \{i\}, T) &= \lambda[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + \mu[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] \\ MC_i(b)(S, T) &= [b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T)] + [b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})] \\ MC_i(b)(S, T \cup \{i\}) &= \mu[b(S \cup \{i\}, T) - b(S, T \cup \{i\})] + \lambda[b(S, T) - b(S, T \cup \{i\})] \end{aligned}$$

このとき、限界貢献度の期待値を全体合理性を満たすように正規化すると、正規化 Banzhaf 値が得られる。また、独裁者に関する性質を満たす限界貢献度の期待値は、擬 Banzhaf 値と一致する。

このように、擬 Banzhaf 値、正規化 Banzhaf 値は、提携における限界貢献度の点からも特徴づけが可能である。

7. 双協力ゲームの部分クラスとしての重みつき多数決ゲーム

この節では、双協力ゲームの部分クラスとなる重みつき多数決ゲームを定義し、数値例を与える。まず、重みつき多数決ゲームの定義を考える。

定義 10 次を満たす p, q ($0 < p \leq 1, 0 < q \leq 1$) と w_1, w_2, \dots, w_n が存在するとき, 双協力ゲーム $b: BG \rightarrow \mathbb{R}$ を重みつき多数決ゲームと呼ぶ.

$$b(S, T) = \begin{cases} 1 & \text{if } \sum_{i \in S} w_i \geq q \left(\sum_{i \in S} w_i + \sum_{i \in T} w_i \right), \sum_{i \in S} w_i + \sum_{i \in T} w_i \geq p \sum_{i \in N} w_i \\ -1 & \text{if } \sum_{i \in S} w_i < q \left(\sum_{i \in S} w_i + \sum_{i \in T} w_i \right), \sum_{i \in S} w_i + \sum_{i \in T} w_i \geq p \sum_{i \in N} w_i \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

また, 重みつき多数決ゲームを $[p, q; w_1, w_2, \dots, w_n]$ とも表す.

この定義は, 次のように解釈できる. もし出席者の票数の合計が全体の票数の $100p\%$ 以上であるとき, すなわち $\sum_{i \in S \cup T} w_i \geq p \sum_{i \in N} w_i$ が成り立つとき, その議決が有効であると考えられる. この条件が成り立たないとき, 議決は無効 (行われない) と考えられ, ゲーム b の関数値は 0 とする.

議決が有効であり, しかも賛成の票数の合計が全出席者の票数の合計の $100q\%$ 以上であるときに議案が可決されるとみなす. すなわち, $\sum_{i \in S \cup T} w_i \geq p \sum_{i \in N} w_i$ かつ $\sum_{i \in S} w_i \geq q \sum_{i \in S \cup T} w_i$ が成り立つとき, 議案は可決されるものとみなし, ゲームの関数値は 1 となる.

また, 議決が有効であり, 賛成の票数の合計が全出席者の票数の合計の $100q\%$ 未満であるときは議案が否決されるとみなす. すなわち, $\sum_{i \in S \cup T} w_i \geq p \sum_{i \in N} w_i$ かつ $\sum_{i \in S} w_i < q \sum_{i \in S \cup T} w_i$ が成り立つとき, 議案は否決されるものとし, ゲームの関数値は -1 となる.

例 2 4名の株主 1, 2, 3, 4 からなる株主総会を考える. 各株主 1, 2, 3, 4 は, それぞれ 35, 30, 25, 10 票所有しているものとする. 出席者の株数の合計が総株数の 50% 以上であるときに株主総会の決議が有効となるものとする. また, 決議が有効であるとき, 賛成者の株数の合計が出席者の株数の合計の 50% 以上であるときに可決され, そうでなければ否決されるものとする. このとき, この状況は重みつき多数決ゲーム $[0.5, 0.5; 35, 30, 25, 10]$ で特徴づけられ, 次のような双協力ゲームであると考えられる.

$$b(S, T) = \begin{cases} 1, & \text{if } \sum_{i \in S} w_i \geq 0.5 \sum_{i \in S \cup T} w_i \geq 25, \\ -1, & \text{if } \sum_{i \in S \cup T} w_i > 50, \sum_{i \in S} w_i \leq 0.5 \sum_{i \in S \cup T} w_i, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

双協力ゲーム上の Shapley 値, 擬 Banzhaf 値の関数値として $(\phi_i(b))_{i \in N}, (\beta_i(b))_{i \in N}$ を得る. ここで, $\sum_{i \in N} \phi_i(b) \neq 1, \sum_{i \in N} \beta_i(b) \neq 1$ であることから, 通常の協力ゲームと比較するために, 正規化し, $(\hat{\phi}_i(b))_{i \in N}, (\hat{\beta}_i(b))_{i \in N}$ を得る. 結果は, 表 1 のとおりである.

さらに, 対応する通常の協力ゲームとして, $S \in 2^N$ に対して $v(S) = b(S, N \setminus S)$ で定義される $v \in \mathcal{G}$ を考える. このとき, 通常の協力ゲームの Shapley 値 $(\phi_i(v))_{i \in N}$, Banzhaf 値 $(\beta_i(b))_{i \in N}$ が得られ, またそれらを正規化した $(\hat{\phi}_i(v))_{i \in N}, (\hat{\beta}_i(b))_{i \in N}$ も表 1 のように得られる.

表 1: 重みつき多数決ゲーム $[0.5, 0.5; 35, 30, 25, 10]$ に対する Shapley 値, Banzhaf 値

| Stockholder | 1 | 2 | 3 | 4 |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|
| The rate | 0.3500 | 0.3000 | 0.2500 | 0.1000 |
| $\phi_i(v)$ | 0.6667 | 0.6667 | 0.6667 | 0.0000 |
| $\hat{\phi}_i(v)$ | 0.3333 | 0.3333 | 0.3333 | 0.0000 |
| $\beta_i(v)$ | 1.0000 | 1.0000 | 1.0000 | 0.0000 |
| $\hat{\beta}_i(v)$ | 0.3333 | 0.3333 | 0.3333 | 0.0000 |
| $\phi_i(b)$ | 0.7714 | 0.6190 | 0.4667 | 0.1429 |
| $\hat{\phi}_i(b)$ | 0.3857 | 0.3095 | 0.2333 | 0.0714 |
| $\beta_i(b)$ | 1.1111 | 0.8889 | 0.6667 | 0.3704 |
| $\hat{\beta}_i(b)$ | 0.3659 | 0.2927 | 0.2195 | 0.1220 |

通常の協力ゲームの Shapley 値, Banzhaf 値では, 株主 1-3 は同等の投票力を持っているとみなされているが, 双協力ゲームに基づく Shapley 値と Banzhaf 値では互いに異なる投票力を持っているとみなされている. さらに, 双協力ゲームでは, 株主 4 がいくぶん影響力があるとみなされるのに対して, 通常の協力ゲームでは影響力がないものとみなされている. 中立や棄権という選択肢が存在する場合には, その選択肢が存在するという前提に基づいて定義される双協力ゲームで分析する方がより妥当であると考えられるかもしれない.

8. おわりに

本研究では, 双協力ゲームにおける擬 Banzhaf 値, 正規化 Banzhaf 値を解として提案し, その公理化を行い, 数値例を与えた. さらに, 双協力ゲームにおける提携における限界貢献度を議論し, この点から擬 Banzhaf 値, 正規化 Banzhaf 値が特徴づけられることを説明した. また, 双協力ゲームの部分クラスとなる重みつき多数決ゲームを定式化し, 数値例を与えた. 双協力ゲームにおける擬 Banzhaf 値, 正規化 Banzhaf 値は, 中立という立場が存在する場合の投票システムにおける投票者の影響力分析に有効であると考えられる.

参考文献

- [1] J.F. Banzhaf, Weighted voting doesn't work: a mathematical analysis, *Rutgers Law Review*, Vol. 19, pp. 317-343 (1965)
- [2] J.M. Bilbao, *Cooperative Games on Combinatorial Structures*, Kluwer Academic Publishers, The Netherlands, 2000.
- [3] J.M. Bilbao, J.R. Fernández, N. Jiménez, J.J. López, Probabilistic values for bicooperative games, Working Paper, University of Seville (2004)

- [4] J.M. Bilbao, J.R. Fernández, N. Jiménez, J.J. López, The Shapley value for bicooperative games, Working Paper, University of Seville (2004)
- [5] Y. Chun: A new axiomatization of the Shapley value, *Games Econ. Beh.*, Vol.1, pp.119–130 (1989)
- [6] M. Grabisch and Ch. Labreuche, Bi-capacities, Working paper, University of Paris VI, 2002.
- [7] M. Grabisch and Ch. Labreuche, Bi-capacities – I: definition, Möbius transform and interaction, *Fuzzy Sets and Systems* 151, pp. 211-236 (2005)
- [8] S. Hart, A. Mas-Colell: Potential, value and consistency, *Econometrica*, Vol. 57, pp. 589–614 (1989)
- [9] E. Lehrer, An axiomatization of the Banzhaf value, *International Journal of Game Theory*, Vol. 17, pp. 89–99 (1988)
- [10] L.S. Shapley, A Value for n -person games, *Contributions to the Theory of Games*, Vol. 2, pp. 307-317 (1953)
- [11] R. van den Brink: An axiomatization of the Shapley value using a fairness property, *Int. J. Game Theory*, Vol. 30, pp. 309-319 (2001)
- [12] R.J. Weber, Probabilistic values for games, in: *The Shapley Value*, A.E. Roth (ed.), Cambridge Univ. Press, pp. 101–119 (1988)
- [13] H.P. Young: Monotonic solutions of cooperative games, *Int. J. Game Theory*, Vol. 14, pp. 65–72 (1985)